

Lecture 8 - MDOF systemer del 3 (Stadig om egenvinging af MDOF-systemer) (yderlig implementering af dæmpning)

5. november 2024 12:15

Indholdsfortegnelse

- 1. Implementering af dæmpning del II
 - Modalkobling
 - De dæmpede egenverdier og egenvektorer
 - To dæmpningsmodeller
 - Gennemgang af opgave 2 i prøvesæt 1
- 2. Gennemgang af opg 2 i prøvesamensæt 1

1. Implementering af dæmpning del 2

Vi betragter dæmpet egensvingning af et LTI-MDOF system med n DOF (hvor $n \in \mathbb{N}$), hvorved bevægelsesystemet er givet ved

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (1.1)$$

Hvor M er vores massematrix, C er vores dæmpningsmatrix og K er vores stivhedsmatrix. Disse er kvadratiske, vi har altså $M, C, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Det udæmpede egenverdi problem for system (1.1) er givet ved

$$K(-\omega_j^2 M \Phi)_j = 0 \quad (1.2)$$

Vi samler vores egenverdier ($\lambda_j = \omega_j^2$) i vores spektral matrice:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{bmatrix} \quad (1.3a)$$

Med $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Vi samler vores egenvektorer i modalmatricen

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2 \dots \phi_j] \quad (1.3b)$$

Med $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Modalmatricen er altså en matrice med egenvektorer som koller

Med afsæt i (1.3b) har vi
Den modale massematrix

$$\tilde{M} = \Phi^T M \Phi \quad (1.4a)$$

Og den modale stivhedsmatrix

$$\tilde{K} = \Phi^T K \Phi \quad (1.4b)$$

Begge disse (1.4a og 1.4b) er diagonale matricer. Ydermere har vi den modale dæmpningsmatrice

$$\tilde{C} = \Phi^T C \Phi \quad (1.4c)$$

Klassisk dæmpning

Dæmpningen er klassisk såfremt at $\tilde{C}$ er diagonal.

Vi mindes, at løsningen til (1.1) kan skrives som

$$x(t) = \Phi q(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j q_j(t) \quad (1.5)$$

Hvor q_j betegnes det j 'te modale flytningskoordinat.

For system (1.1) med $C = 0$, ved vi at $q_j(t) = A_j \cos(\omega_j t - \theta_j)$

Hvad hvis $C \neq 0$ og dæmpning er klassisk?

Vi indsætter (1.5) i (1.1), hvorved

$$M\Phi\ddot{q}(t) + C\Phi\dot{q}(t) + K\Phi q(t) = 0$$

Vi præmultipliserer med Φ^T

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{q}(t) + \Phi^T K \Phi q(t) = 0$$

Hvorved vi får (det er bare vores modale matricer)

$$\tilde{M}\ddot{x}(t) + \tilde{C}\dot{x}(t) + \tilde{K}x(t) = 0$$

Under vores antagelse, at af dæmpningen er klassisk, kan vi skrive

$$\begin{bmatrix} \tilde{m}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{m}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{k}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} = \vec{0}$$

Vi har altså formået at dekomponere differential ligningerne (de er altså ikke længere koblet, fordi alle vores matricer er diagonale), for hver frihedsgrad kan vi altså skrive en ligning der hedder

$$\tilde{m}_{jj}\ddot{q}(t) + \tilde{c}_{jj}\dot{q}(t) + \tilde{k}_{jj}q(t) = 0 \quad (1.6) \quad \forall j \in [1, n]$$

Vi kan dele ligningen med $\tilde{m}_{jj}$

$$\ddot{q}(t) + \frac{\tilde{c}_{jj}}{\tilde{m}_{jj}} \dot{q}(t) + \frac{\tilde{k}_{jj}}{\tilde{m}_{jj}} q(t) = 0$$

Så hvis vi har klassisk dæmpning kan vi altså dekode ligningerne, og finde både egenverdierne og de dæmpede egenverdier, hvis vi husker (for underdæmpede systemer) Vores **dæmpede egenverdier** er altså :

$$\{\lambda_j, \lambda_{j+n}\} = -\zeta_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \quad (1.7)$$

(altså to egenverdier, den ene den komplekst konjugerede den anden) og hvor Hvor vi har egenfrekvensen (den udæmpede vel og mærke) De uæmpede egenfrekvenser kan desuden regnet ud fra den dæmpede egen værdi som

$$\omega_j = |\lambda_j| \text{ (kun for underdæmpede, hvor } |a| \text{ betyder længden)}$$

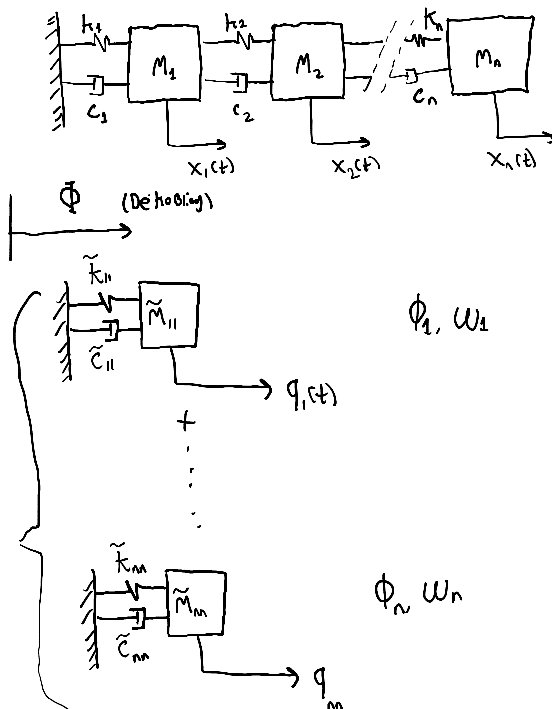
$$\omega_j = \sqrt{\frac{\tilde{k}_{jj}}{\tilde{m}_{jj}}}$$

Og dæmpningen

$$\zeta_j = \frac{\tilde{c}_{jj}}{2\tilde{m}_{jj}\omega_j} \quad \text{God til at finde dæmpningsmatrice}$$

Her er λ_j den j' te dæmpede egenværdi.

Eksempel på dekobling.:



VIGTIGT!! q_1 har intet med x_1 at gøre i den forstand. q_1 fortæller noget om hvor meget den første egensvingningskonfiguration påvirker den samlede flytning, q_2 hvor meget den anden egensvingningskonfiguration bidrager til den samlede flytning osv osv. (jævnfør 1.5).

Løsningen til (1.6) er givet som

$$q_j(t) = A_j e^{-\zeta_j \omega_j t} \cos(\omega_{d_j} t - \theta_j)$$

Alternativt kan vi skrive

$$q_j(t) = e^{-\zeta_j \omega_j t} (A_{1j} \cos(\omega_{d_j} t) + A_{2j} \sin(\omega_{d_j} t))$$

Hvor den dæmpede egenfrekvens er givet ved (I intervallet $\zeta_j \in [0,1)$)

$$\omega_{d_j} = \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}$$

Vi har altså at (for udæmpede / ukritiske systemer)

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j A_j e^{-\zeta_j \omega_j t} \cos(\omega_{d_j} t - \theta_j) = \sum_{j=1}^n e^{-\zeta_j \omega_j t} (A_{1j} \cos(\omega_{d_j} t) + A_{2j} \sin(\omega_{d_j} t))$$

Det er altså den totale løsning, fordi vi summerer bidraget fra alle egensvingningskonfigurationer sammen. ϕ_j for klassisk dæmpning er bare den odæmpede.

Sætning 1.1

For **klassisk dæmpning** gælder det at, de dæmpede egenvektorer er lig de udæmpede egenvektorer.

Definition 1.1: Modaldæmpning (En dæmpningsmodel)

Modaldæmpning er, under antagelse af klassisk dæmpning givet ved

$$C = \Phi \tilde{C} \Phi^{-1}$$

Eftersom vi har definition (1.4c) har vi altså for klassisk dæmpning, hvilket er cool.

$$C = \Phi \tilde{C} \Phi^{-1} \begin{bmatrix} 2\zeta_1 \tilde{m}_{11} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_n \tilde{m}_{nn} \omega_n \end{bmatrix} \Phi^{-1}$$

Det må betyde at FOR KLASSISK DÆMPNING!

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 2\zeta_1 \tilde{m}_{11} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_n \tilde{m}_{nn} \omega_n \end{bmatrix}$$

Hvilket siger rimeligt fucking sejt ud. (God formel)

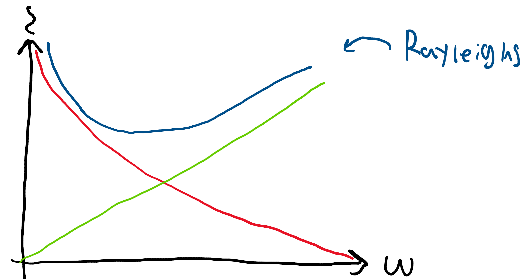
Definition 1.2: Rayleighs dæmpningsmodel

Er givet ved

$$C = \alpha M + \beta K$$

Vi ønsker at bestemme de 2 skalaerer α og β . Det gør vi vha. af vores egensvingskonfigurationer. Vi kan deducere at

$$\tilde{c}_{jj} = \alpha \tilde{m}_{jj} + \beta \tilde{k}_{jj}$$



Vi husker at

$$\tilde{c}_{jj} = 2\zeta_j \tilde{m} \omega_j$$

Og får

$$2\zeta_j \tilde{m} \omega_j = \alpha \tilde{m}_{jj} + \beta \tilde{k}_{jj}$$

Hvilket giver os

$\zeta_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta \omega_j}{2}$	Vigtig til at finde de to skalærer.
---	-------------------------------------

Delen med alpha kaldes masseproportional, delen med beta kaldes stivhedsproportional.

Jo højere frekvens, jo mindre bidrager massen til vibrationen og jo mere bidrager stivheds massen til vibrationen.

Følgesætning 1.1: vedrørende rayleighs dæmpningsmodel

Rayleighs dæmpningmodel yder klassisk dæmpning. Det betyder altså, at såfremt vi bruger den, så kan vi dekomple vores ligningssystem i (1.1)

Klassisk dæmpning

For klassisk dæmpning gælder det desuden at

$$\zeta_j = -\frac{\operatorname{Re}(\lambda_j)}{|\lambda_j|}$$

Hvor λ_j er den dæmpede egenværdi. Og $|\lambda_j| = \sqrt{\zeta_j^2 \omega_j^2 + \omega_j^2 (-\zeta_j^2)} = \omega_j$