

Noter fra timen

1. oktober 2024 12:13

Indholdsfortegnelse

1. Indledende noter

- Repetition fra sidst
- Periodisk belastede SDOF systemer

2. Impulsbelastede SDOF systemer

- Grunlæggende definitioner
- Impulsresponsfunktionen

3. Generelt belastede SDOF-systemer

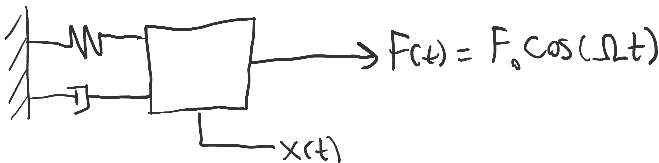
- (ifh til deterministiske laster)
- Deterministik = Vi har funktionsforskriften for de laster vi opererer med.
- Duhamels Integrals
- Stabilitet

4. Gennemgang af eksamensopgave

Indledende noter

Fra lektion 4: **Harmiske laster**

Vi kiggede på SDOF systemer som blev påvirket af en harmonisk ekstern last.



For dette system har vi bevægelsesligningen

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

Løsningen til ligningen overover er givet ved

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Den homogene løsning har vi gennemgået i lektion 2 og 3.

Den partikulære løsning er defineret som

$$x_p(t) = B \cos(\Omega t - \psi)$$

Vi har desuden vores frekvensforhold

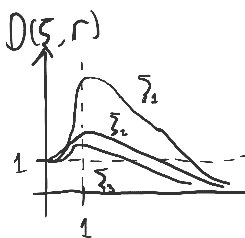
$$r = \frac{\Omega}{\omega_n}$$

Vi har når $r = 0$, så er $\Omega = 0$. Dette er vores

Og forstærkningsfaktoren

$$D(\zeta, r) = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 r^2}}$$

En skitse af vores forstærkningsfaktor



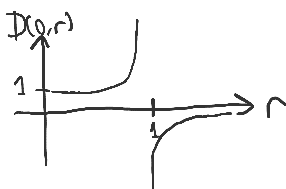
Her er $\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3$

Vi ser altså at ved en høj dæmpning, så er forstærkningsfaktoren lav. Jo højere dæmpningen er, jo mere ude af fase bliver de to frekvenser også, og så bliver forstærkningen lav.

Vi ser at for $\zeta = 0$ (Det udæmpede tilfælde), får vi

$$D(0, r) = \frac{1}{1-r^2}$$

En skitse af dette



Definitioner

Definition 1.1

Lad $F(t)$ være periodisk. Den mindste værdi $T_f \in \mathbb{R}_{>0}$, der tilfredsstiller at

$$F(t) = F(t + T_f)$$

Er den fundamentale periode. Den fundamentale frekvens er givet ved $\omega_f = \frac{2\pi}{T_f}$

Definition 2.1

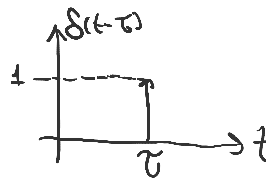
Dirac-delta-"funktionen" er givet som

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases}$$

Og den overholder

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1$$

Skitse af dirac-delta

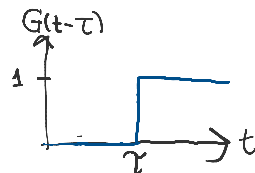


Bemærkning 2.1:

"Stamfunktionen" $G(t - \tau)$ til dirac delta funktionen, er givet ved

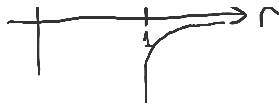
$$G(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t \geq \tau \end{cases}$$

Skitse af stamfunktionen

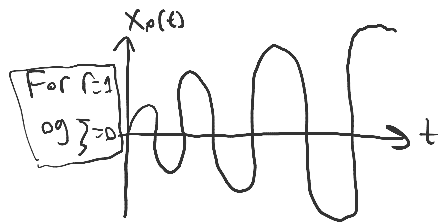


G kaldes enhedsstep funktionen (heaviside funktion)

Definitionen er impuls er noget der overholder dirac-delta funktionen



Dette vil resultere i, at omkring resonans, (altså $r = 1$), så vil flytningsamplituden vokse til uendeligt.



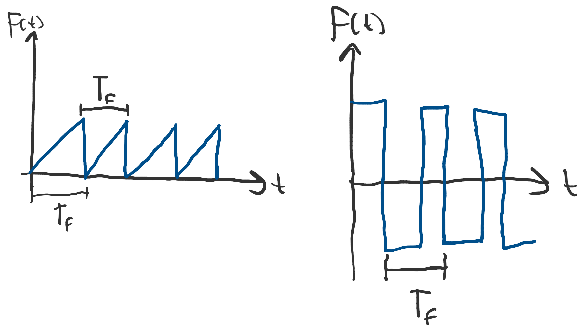
Det betyder også, det eneste der i den fysiske verden stopper flytningsamplituden for at gå helt amok, når vi har resonans, er altså dæmpning.

Periodisk lastede SDOF systemer

Hvad, hvis $F(t)$ ikke er harmonisk, men at den stadig er periodisk?

Harmoniske funktioner er blot en underkategori af periodiske systemer, her kigger vi på alt andet.

Eksempler: (Se desuden definition 1.1)



Såfremt at vores eksterne last $F(t)$ er periodisk, kan vi beskrive den vha Fourier serien

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_f t) + b_n \sin(n\omega_f t))$$

Hvor for alle $n \geq 0$, der gælder det at

$$a_n = \frac{2}{T_f} \int_0^{T_f} F(t) \cos(n\omega_f t) dt$$

Og for alle $n > 0$ der gælder det at

$$b_n = \frac{2}{T_f} \int_0^{T_f} F(t) \sin(n\omega_f t) dt$$

Med denne viden kan vi skrive bevægelsesligningen for et SDOF system som

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_f t) + b_n \sin(n\omega_f t))$$

Det påvirker ikke vores homogene løsning, men det påvirker den partikulære løsning.

Den partikulære løsning til bevægelsesligningen må være (Grundet superposition)

$$x_p(t) = x_p^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} x_p^{(n)}(t)$$

Vi finder altså alle partikulære løsninger. For hvert led. Så først for bare $\frac{a_0}{2}$ og så for $a_1 \cos(\omega_f t) + b_1 \sin(\omega_f t)$ derefter $a_2 \cos(2\omega_f t) + b_2 \sin(2\omega_f t)$ osv (uden foregående led altså)

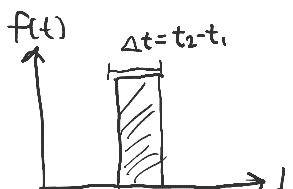
(Kommer der en opgave med fourier til eksamen, så kommer der maks til at være 1 eller 2 led af fourier serien)

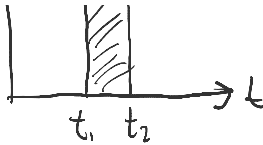
2. Impulsbelastede SDOF-systemer

Se definition 2.1 på for den matematiske definition

Rent fysisk:

Et impuls er en aktion, der forekommer/virker over "meget kort" tid. En skitse kunne se således ud:





Formaliseringen er givet ved (**impuls er defineret som**)

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$$

Ved brug af denne definition, kan vi skrive vores bevægelsesligning

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}_p(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} c\dot{x}_p(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} kx_p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt = I$$

Vi lader $\Delta t \rightarrow 0$

Det må betyde at flytningen bliver meget lille, (og når man integrerer hastigheden får man også flytning, så 2 af vores led giver 0) Vi får

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} c\dot{x}_p(t) dt = 0 \text{ og } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} kx_p(t) dt = 0$$

Hermed fås at

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} m \int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}_p(t) dt = I$$

Hvilket giver os

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} m (\dot{x}_p(t_2) - \dot{x}_p(t_1)) = I$$

Vi lader $\Delta \dot{x}_p = \dot{x}_p(t_2) - \dot{x}_p(t_1)$

Vi får altså

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \dot{x}_p = \frac{I}{m}$$

Dette indikerer, at opførsel af et impuls, svarer til at lave en abrupt ændring i hastigheden. Når vi påfører et impuls når impulset virker over meget kort tid, så svarer den last til, at vi ændrer abrupt i hastigheden (men ikke i flytningen)

F.eks., hvis $t_1 = 0$, så følger det at

$$m\ddot{x}_p(t) + c\dot{x}_p + kx_p(t) = 0$$

Så det svarer egentlig bare til at vi har en begyndelseshastighed

$$x_p(0) = 0, \dot{x}_p(0) = \frac{I}{m}$$

(Bemærk at det KUN er den partiulære flytning ikke er 0, der kan altså stadig godt være en start flytning, der ikke er 0, som manifesterer sig i den homogene løsning) Så vi kan altså analysere det som værende et system uden ekstern last, men med en start hastighed. Altså fri svingning af et dæmpet system.

Til vores partikulære system har vi altså løsningen

$$x_p(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos(\omega_d t)) + A_2 \sin(\omega_d t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \theta)$$

Martin udleder at $A_1 = 0$

Vi får altså

$$x_p(t) = A_2 e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

Ved at differentiere dette og indsætte vores begyndelsesbetingelsen $\dot{x}_p(0) = \frac{I}{m}$

Vi får at

$$A_2 = \frac{I}{m\omega_d}$$

Så løsningen bliver slutteligt

$$x_p(t) = \frac{I}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

Denne løsning ser således ud:



Såfremt at $0 < \zeta < 1$ bliver den fuldstændige løsning

$$x(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \theta) + \frac{I}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

Og her vil man bare finde A og θ ud fra begyndelsesbetingelser.

Hvis impulset virker ved tiden τ , får vi

$$x_p(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ \frac{I}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t), & t \geq \tau \end{cases}$$

Med afset i dette introducer vi impulsresponsfunktionen

$$H(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin(\omega_d(t - \tau)) & t \geq \tau \end{cases}$$

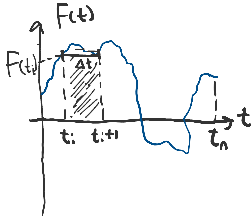
Denne er det respons der kommer (den partiikulære løsning der vil forkomme) hvis den eksterne last er et impuls der har størrelsen lige nøjagtigt 1

Den partiikulære løsning kan altså skrives

$$x_p(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ H(t - \tau)I, & t \geq \tau \end{cases}$$

3. Generelt belastede SDOF-systemer

Lad os kigge på et generelt belastet SDOF system



Vi har altså at

$$\Delta x_p(t_i) = H(t - t_i)F(t_i)\Delta t$$

I dette lille stykke, der vil impulset være $F(t_i)\Delta t$

Vi har nu et lille stykke vi kan beskrive som et impuls. Vi summerer bare op over disse, og laver mange små stykker

$$x_p(t_n) = \sum_{i=1}^n H(t - t_i)F(t_i)\Delta t$$

Nu gør vi det bare over meget små tidsændringer, $\Delta t \rightarrow 0$, det betyder at $n \rightarrow \infty$

Så vi får altså

$$x_p(t) = \int_0^t H(t - \tau)F(\tau)d\tau$$

Dette kalder vi **Duhamels integrale**. Er ret sikker på τ er tidspunktet impulsen rammer?