

Noter fra timen (Free damped vibration)

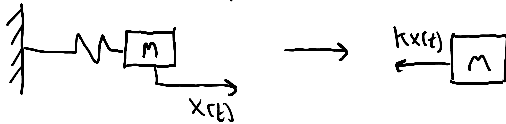
17. september 2024 12:08

Indholdsfortegnelse

1. Indledende Noter
2. Fri svingning af dæmpede SDOF-systemer
 - Bevægelsesligningen og dens løsning
 - Dæmpningsforhold samt dæmpet egenperiode og dæmpet egenfrekvens
 - Implementering af x_0 og $\dot{x}_0$
 - Det logaritmiske deskrement
3. Stabilitetsbetingelser

Indledende noter

Fra lektion 2:



Vi anvender newtons 2. lov, hvorved

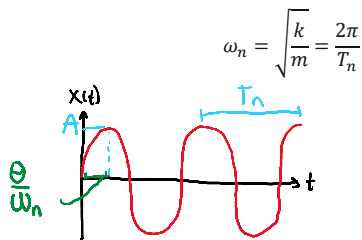
$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.1)$$

Med $x_0 = x(0)$, $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$

Løsningen til (1.1) er givet ved

$$x(t) = A \cos(\omega_n t - \theta)$$

Med

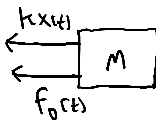


Definition 1: Dæmpning

Dæmpning er enhver form for ændring i mekanisk energi, der ikke skyldes eksterne laster eller begyndelsesbetingelser.

- F.eks friktion og vindmodstand.

Vi ønsker at modellere dæmpning i vores SDOF system. Her vil altså være en intern dæmpning, som også er en kraft på vores masse.



Dæmpningsmodeller

- Linær-viskos dæmpning: $F_d(t) = c\dot{x}(t)$
 - Hvor c = dæmpningskonstant
- Friktionsdæmpning: $F_d(t) = c \cdot \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|}$
 - c er igen en dæmpningskonstant, dog ikke den samme som ovenfor.
- Væskedæmpning: $F_d(t) = c \cdot \dot{x}(t)|\dot{x}(t)|$
 - c er igen en dæmpningskonstant, dog ikke den samme som ovenfor.

Vi kigger kun på linær viskosdæmpning

Fri svingningen af dæmpede SDOF-systemer

Vi kan beskrive den således (udfra frit legemediagrammet)

$$m\ddot{x} + f_d(t) + kx(t) = 0$$

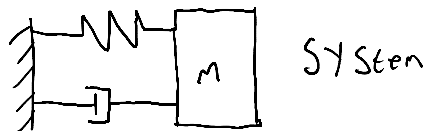
Da kurset kun omfatter linær viskos dæmpning, så vi får for vores SDOF-system

$$m\ddot{x} + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (1.2)$$

Med $x_0 = x(0)$ og $\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = 0$



Med $x_0 = x(0)$ og $\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = 0$



Løsningen til (1.2) er givet som

$$x(t) = ae^{\lambda t} \quad (2.1)$$

Indsættelse af 2.1 i 1.2 yder

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k)ae^{\lambda t} = 0$$

Martin udleder en masse på tavlen, men det står også i bogen.

Vi får at

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Hvilket kan yderligere reduceres med den naturlige egenfrekvens

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \omega_n^2}$$

Vi lader dæmpningsforholdet være givet ved:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (2.2)$$

Med c_c som den kritiske dæmpning.

Med definition (2.2) får vi

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (2.3)$$

Typen af dæmpning og løsninger til den karakteristiske ligning

Udæmpet system: $\zeta = 0$

- Vi får $\lambda = \pm i\omega_n$

Underkritiskdæmpet system: $0 < \zeta < 1$

- Vi får $\lambda = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$

Hertil definerer vi den dæmpede cykliske egenfrekvens

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

Så vi kan omskrive

$$\lambda = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \quad \text{Underdæmpet lamda}$$

Dette giver os altså løsningen til bevægelsesligningen

$$x(t) = a_1 e^{(-\zeta\omega_n + i\omega_d)t} + a_2 e^{(-\zeta\omega_n - i\omega_d)t}$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t))$$

Alternativt

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_n t} \cdot \cos(\omega_d t - \theta) \quad \text{Underdæmpet løsning}$$

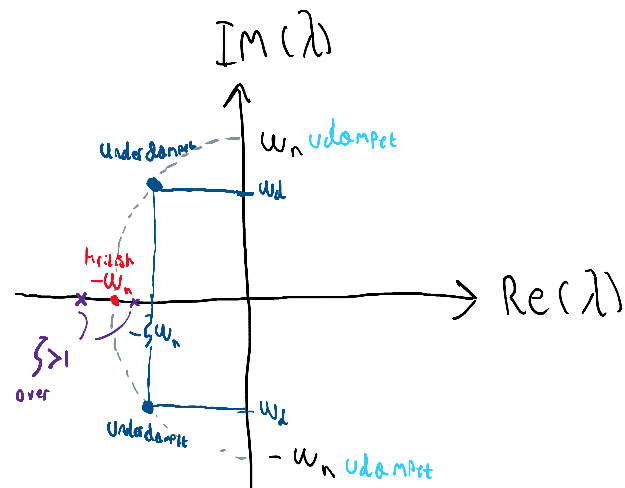
Igen med

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \text{ og } \theta = \tan^{-1}(A_2/A_1)$$

$$\text{Og } A_1 = x_0$$

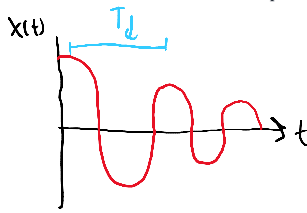
$$A_2 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}$$

Skitse af underkritisk dæmpet system:



$$A_2 = \frac{x_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d}$$

Skitse af underkritisk dæmpet system:



Vi har desuden

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{T_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Vi har altså at $T_d > T_n$

Kritisk dæmpet: $\zeta = 1$

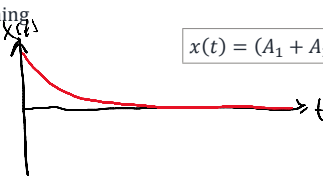
Vi får

$\lambda = -\omega_n$	Lambda kritisk dæmpet
-----------------------	-----------------------

Og løsning

$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t}$	Løsning dæmpet
---------------------------------------	----------------

Skitse



Overkritisk dæmpet

Vi får

$\lambda = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$	Lambda overkritisk dæmpet
---	---------------------------

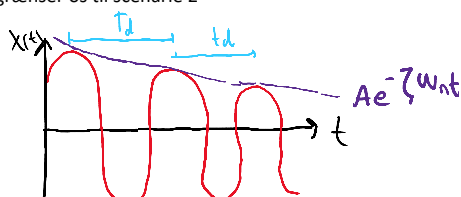
Løsningen er

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (a_1 e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}t} + a_2 e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}t})$$

Konvergerer langsommere mod 0 end kritisk dæmpning, dog er der i begge tilfælde ingen harmoniske svingninger

Det logaritmiske dekrement

Vi begrænser os til scenarie 2



$$x(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \theta)$$

Det logaritmiske dekrement, er givet ved

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{x(t)}{x(t + nT_d)}\right)$$

Hvor n = perioder væk fra t

Ud fra det logaritmiske dekrement kan man finde diverse ting.

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

Stabilitetsbetingelser

Definition 3.1:

Et mekanisk system er stabilt såfremt endelige laster og begyndelsesbetingelser medfører et endeligt respons. Med andre ord: For alle tidspunkter i tidsintervallet vi kigger på, der er vores flytninger, vores hastigheder og vores accelerationer reelle tal.

Sætning 3.1: For LTI-SDOF systemer gælder det at

$$\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$$

Er en nødvendig betingelse for stabilitet. , mens

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$$

Er en tilstrækkelig betingelse for stabilitet.